1．

(1)　1ラジアンとは，$\boxed{\text{ア}}$ のことである．$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　半径が1，面積が1の扇形の中心角の大きさ
①　半径がπ，面積が1の扇形の中心角の大きさ
②　半径が1，弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ
③　半径がπ，弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ

(2)　144°を弧度で表すと $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ ラジアンである．また，$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと $\boxed{\text{エオカ}}$° である．

（3）　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{30}\right)=1 \quad \cdots ①$$

を満たすθの値を求めよう．

$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおくと，①は

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right)=1$$

と表せる．加法定理を用いると，この式は

$$\sin x-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\cos x=1$$

となる．さらに，三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる．$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ だから，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ である．

〔2〕　c を正の定数として，不等式

$$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad \cdots\cdots ②$$

を考える．

3を底とする②の両辺の対数をとり，$t=\log_3 x$ とおくと

$$t^{\boxed{ツ}}-\boxed{タ}\,t+\boxed{タ}\log_3 c \geqq 0 \quad \cdots\cdots ③$$

となる．ただし，対数$\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という．

$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，②を満たすx の値の範囲を求めよう．③により

$$t \leqq \boxed{チ},\quad t \geqq \boxed{ツ}$$

である．さらに，真数の条件を考えて

$$\boxed{テ} < x \leqq \boxed{ト},\quad x \geqq \boxed{ナ}$$

となる．

次に，②が$x>\boxed{テ}$ の範囲でつねに成り立つようなc の値の範囲を求めよう．

x が$x>\boxed{テ}$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は$\boxed{ニ}$ である．$\boxed{ニ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　正の実数全体　　　①　負の実数全体

②　実数全体　　　　　③　1以外の実数全体

この範囲のt に対して，③がつねに成り立つための必要十分条件は，$\log_3 c \geqq \dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ である．すなわち，$c \geqq \sqrt[\boxed{ノ}]{\boxed{ハヒ}}$ である．

解説

〔1〕

(1)　単位円（半径1の円）を描き，中心角の大きさをそれに対応する弧の長さと定義したものがラジアンであるから②が正解.

(2)　$144°=\dfrac{\pi}{180°}\times 144°=\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}}\pi$ ラジアン

$\dfrac{23}{12}\pi$ラジアン$=\dfrac{23}{12}\pi\times\dfrac{180°}{\pi}=\boxed{345}°$

(3)　$\theta+\dfrac{\pi}{30}=\theta+\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{30}=x-\dfrac{(6-1)}{30}\pi=x-\dfrac{\pi}{6}$ だから，①は

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{\boxed{6}}\right)=1$$

ここで，

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$$

だから，

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin x-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)$$
$$=\sin x-\sqrt{3}\cos x$$

よって，

$$\sin x-\sqrt{\boxed{3}}\cos x=1$$

合成して，

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ だから

$$2\times\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=1$$

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{\boxed{3}}\right)=\frac{1}{\boxed{2}}$$

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ だから，$x=\theta+\frac{\pi}{5}$ の範囲は

$$\frac{7}{10}\pi\leqq x\leqq\frac{6}{5}\pi$$

さらに

$$\frac{11}{30}\pi\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{13}{15}\pi$$

これは度でいうと，66度から156度だから，サインが$\frac{1}{2}$ となるのは150度，

すなわち，$\frac{5}{6}\pi$．よって，

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$$

$$x=\frac{7}{6}\pi$$

$$\theta=\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{35-6}{30}\pi=\frac{\boxed{29}}{\boxed{30}}\pi$$

(2)

$$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3$$

の両辺の3を底とする対数をとって

$$\log_3\left(x^{\log_3 x}\right) \geqq \log_3\left(\frac{x}{c}\right)^3$$

$$(\log_3 x)\log_3 x \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$\log_3 x = t$ として

$$t^{\boxed{2}} - \boxed{3}\,t + 3\log_3 c \geqq 0$$

$c = \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$ のとき，$\log_3 c = \dfrac{2}{3}$ だから，上式は

$$t^2 - 3t + 2 \geqq 0$$

$$(t-1)(t-2) \geqq 0$$

すなわち，

$$t \leqq \boxed{1}, \quad t \geqq \boxed{2}$$

真数条件より $x > 0$ だから，

$$\boxed{0} < x \leqq \boxed{3}, \quad x \geqq \boxed{9}$$

$x > 0$ で2次不等式がつねに成り立つc の範囲を求める．$x > 0$ のとき対数の値は全実数をとり得るから，t の範囲は②．判別式より2次不等式がつねに成り立つのは，

$$\text{判別式}D = (-3)^2 - 4 \times 3\log_3 c$$
$$= 9 - 12\log_3 c \leqq 0$$

$$\log_3 c \geqq \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

$$c \geqq 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[\boxed{4}]{\boxed{27}}$$

2．

〔1〕　$p > 0$ とする．座標平面上の放物線$y = px^2 + qx + r$ をC とし，直線$y = 2x - 1$ をℓとする．C は点A$(1, 1)$ においてℓと接しているとする．

(1)　q とr を，p を用いて表そう．放物線C 上の点Aにおける接線ℓの傾きは$\boxed{\text{ア}}$ であることから，$q = \boxed{\text{イウ}}\,p + \boxed{\text{エ}}$ がわかる．さらに，C は点Aを通ることから，$r = p - \boxed{\text{オ}}$ となる．

(2)　$v>1$ とする．放物線C と直線ℓおよび直線$x=v$ で囲まれた図形の面積S は

$S=\dfrac{p}{\boxed{カ}}\left(v^3-\boxed{キ}v^2+\boxed{ク}v-\boxed{ケ}\right)$ である．また，x 軸とℓおよび

2直線$x=1$，$x=v$ で囲まれた図形の面積T は，$T=v^{\boxed{コ}}-v$ である．

$U=S-T$ は$v=2$ で極値をとるとする．このとき，$p=\boxed{サ}$ であり，$v>1$ の範囲

で$U=0$ となるv の値をv_0 とすると，$v_0=\dfrac{\boxed{シ}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$ であり，$1<v<v_0$ の

範囲でU は$\boxed{ソ}$．$\boxed{ソ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪　つねに増加する　　①　つねに減少する　　②　正の値のみをとる

③　負の値のみをとる　　④　正と負のどちらの値もとる

$p=\boxed{サ}$ のとき，$v>1$ におけるU の最小値は$\boxed{タチ}$ である．

〔2〕　関数$f(x)$ は$x\geqq1$ の範囲でつねに$f(x)\leqq0$ を満たすとする．$t>1$ のとき，曲線$y=f(x)$ とx 軸および2直線$x=1$，$x=t$ で囲まれた図家の面積をW とする．t が$t>1$ の範囲を動くとき，W は，底辺の長さが$2t^2-2$，他の2辺の長さがそれぞれt^2+1 の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする．このとき，$x>1$ における$f(x)$ を求めよう．

$F(x)$ を$f(x)$ の不定積分とする．一般に，$F'(x)=\boxed{ツ}$，$W=\boxed{テ}$ が成り立つ．

$\boxed{ツ}$，$\boxed{テ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを選んでもよい．

⓪　$-F(t)$　　①　$F(t)$　　②　$F(t)-F(1)$

③　$F(t)+F(1)$　　④　$-F(t)+F(1)$　　⑤　$-F(t)-F(1)$

⑥　$-f(x)$　　⑤　$f(x)$　　⑥　$f(x)-f(1)$

したがって，$t>1$ において

$$f(t)=\boxed{トナ}t^{\boxed{ニ}}+\boxed{ヌ}$$

である．よって，$x>1$ における$f(x)$ がわかる．

(解説)

〔1〕

題意は，放物線$y=px^2+qx+r$ が$(1,1)$ を通り，そこにおける接線が$y=2x-1$ で

あることを意味しているから．

$$p+q+r=1,\quad 2p+q=\boxed{2}$$

よって，

$$q=\boxed{-2}p+\boxed{2}$$

$$\begin{aligned} r&=-p-q+1\\ &=-p-(-2p+2)+1\\ &=p-\boxed{1} \end{aligned}$$

$y=2x-1$ が$(1,1)$ における放物線の接線であることから，

$$px^2+qx+r-(2x-1)=p(x-1)^2$$

と書ける．これより

$$\begin{aligned} S&=\int_1^v p(x-1)^2dx\\ &=\left[\frac{p}{3}(x-1)^3\right]_1^v\\ &=\frac{p}{3}(v-1)^3\\ &=\frac{p}{\boxed{3}}\left(v^3-\boxed{3}v^2+\boxed{3}v-\boxed{1}\right) \end{aligned}$$

また，台形の面積より，

$$\begin{aligned} T&=(1+2v-1)\times(v-1)\times\frac{1}{2}\\ &=v^{\boxed{2}}-v \end{aligned}$$

よって，

$$U(v)=S-T=\frac{p}{3}(v-1)^3-v^2+v$$

$$U'(v)=p(v-1)^2-2v+1$$

$v=2$ として

$$U'(2)=p-3$$

$U'(2)=0$ だから，$p=\boxed{3}$．このとき，

$$U=(v-1)^3-v^2+v=(v-1)(v^2-2v+1-v)=(v-1)(v^2-3v+1)$$

$v>1$ で$U=0$ を解くと，

$$v_0=\frac{\boxed{3}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

$$U'=3v^2-8v+4=(v-2)(3v-2)$$

増減表を書く．

v	1		2		v_0
U'		$-$	0	$+$	
U	0	↘	-1	↗	0

よって，$1<v<v_0$ でUは③負の値のみをとる．$v>2$ のとき$U'>0$ で単調増加

だから，$v>1$ のとき，U の最小値は $\boxed{-1}$．

(2)

$F(x)$ が$f(x)$ の不定積分の1つとすると，$F'(x)=\boxed{⑦\ f(x)}$．$f(x)\leqq 0$ なので，

$$W=\int_1^t |f(x)|dx=-\int_1^t f(x)dx=-\Big[F(x)\Big]_1^t=④\ -F(t)+F(1)$$

$2t^2-2$ を底辺としたときの二等辺三角形の高さh は

$$h=\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}=2t$$

よって，

$$W=(2t^2-2)\times(2t)\times\frac{1}{2}=2t^3-2t$$

$$f(t)=-\frac{dW}{dt}=\boxed{-6}\,t^{\boxed{2}}+\boxed{2}$$

3．

第4項が30，初項から第8講までの和が288である等差数列を$\{a_n\}$ とし，$\{a_n\}$ の初項から第n 項までの和をS_n とする．また，第2項が36，初項から第3項までの和が156である等比数列で公比が1より大きいものを$\{b_n\}$ とし，$\{b_n\}$ の初項から第n 項までの和をT_n とする．

(1)　$\{a_n\}$ の初項は$\boxed{\text{アイ}}$，公差は$\boxed{\text{ウエ}}$であり

$$S_n=\boxed{\text{オ}}\,n^2-\boxed{\text{カキ}}\,n$$

である．

(2)　$\{b_n\}$ の初項は$\boxed{\text{クケ}}$，公比は$\boxed{\text{コ}}$であり

$$T_n=\boxed{\text{サ}}\left(\boxed{\text{シ}}^{\,n}-\boxed{\text{ス}}\right)$$

である．

(3)　数列$\{c_n\}$ を次のように定義する．

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$$
$$=n(a_1-b_1)+(n-1)(a_2-b_2)+\cdots\cdots+2(a_{n-1}-b_{n-1})+(a_n-b_n)$$

たとえば

$c_1=a_1-b_1$，　　　$c_2=2(a_1-b_1)+(a_2-b_2)$

$c_3=3(a_1-b_1)+2(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$

である．数列$\{c_n\}$の一般項を求めよう．

$\{c_n\}$の階差数列を$\{d_n\}$とする．$d_n=c_{n+1}-c_n$であるから，$d_n=\boxed{\text{セ}}$を満たす．$\boxed{\text{セ}}$に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ．

⓪ S_n+T_n　　① S_n-T_n　　② $-S_n+T_n$

③ $-S_n-T_n$　　④ $S_{n+1}+T_{n+1}$　　⑤ $S_{n+1}-T_{n+1}$

⑥ $-S_{n+1}+T_{n+1}$　　⑦ $-S_{n+1}-T_{n+1}$

したがって，(1)と(2)により

$$d_n=\boxed{\text{ソ}}n^2-2\cdot\boxed{\text{タ}}^{n+\boxed{\text{チ}}}$$

である．$c_1=\boxed{\text{ツテト}}$であるから，$\{c_n\}$の一般項は

$$c_n=\boxed{\text{ナ}}n^3-\boxed{\text{ニ}}n^2+n+\boxed{\text{ヌ}}-\boxed{\text{タ}}^{n+\boxed{\text{ネ}}}$$

(解説)

(1)　$\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とおくと，

$$a_4=a+3d=30,\quad S_8=8a+\frac{7\times 8}{2}d=8a+28d=288$$

これより，$a=\boxed{-6}$，$d=\boxed{12}$，一般項は $a_n=-6+12(n-1)$

$$S_n=-6n+\frac{n(n-1)}{2}\times 12=\boxed{6}n^2-\boxed{12}n$$

$\{b_n\}$ の初項を b，公比を r とおくと，

$$b_2=br=36,\quad T_3=b+br+br^2=\frac{36}{r}+36+36r=156$$

$3r^2-10r+3=0$

$(3r-1)(r-3)=0$

$r>1$ より，$r=\boxed{3}$.

初項は $b=36\div 3=\boxed{12}$.

一般項は $b_n=12\cdot 3^{n-1}$

$$T_n=12\times\frac{(3^n-1)}{3-1}=6(3^n-1)$$

（3）

$$\begin{aligned}
d_n&=c_{n+1}-c_n\\
&=\{(n+1)(a_1-b_1)+\cdots+(a_{n+1}-b_{n+1})\}-\{n(a_1-b_1)+(a_n-b_n)\}\\
&=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_{n+1}-b_{n+1})\\
&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\
&=⑤\ S_{n+1}-T_{n+1}\\
&=6(n+1)^2-12(n+1)-6(3^{n+1}-1)\\
&=\boxed{6}n^2-2\cdot\boxed{3}^{n+\boxed{2}}
\end{aligned}$$

$c_1=a_1-b_1=-6-12=\boxed{-18}$ より，階差数列の手法により $\{c_n\}$ の一般項を求めると，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
c_n&=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k\\
&=-18+6\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 3^{k+2}\\
&=-18+6\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-54\times\frac{(3^{n-1}-1)}{3-1}\\
&=\boxed{2}n^3-\boxed{3}n^2+n+\boxed{9}-3^{n+\boxed{2}}
\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ.

4．

a を$0<a<1$ を満たす定数とする．三角形ABCを考え，辺ABを1 : 3に内分する点をD，辺BCを$a:1-a$ に内分する点をE，直線AEと直線CDの交点をFとする．$\overrightarrow{\mathrm{FA}}-\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}=\vec{r}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{ア}}$ であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{p}|^2-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2 \quad \cdots\cdots ①$$

である．ただし，$\boxed{\text{ア}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　$\vec{p}+\vec{q}$　　①　$\vec{p}-\vec{q}$　　②　$\vec{q}-\vec{p}$　　③　$-\vec{p}-\vec{q}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ を$\vec{p}$ と$\vec{q}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q} \quad \cdots\cdots ②$$

である．

(3)　s,t をそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ となる実数とする．s とt をa を用いて表そう．

$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$ であるから，②により

$$\vec{q}=\boxed{\text{キク}}\,\vec{p}+\boxed{\text{ケ}}\,s\vec{r} \quad \cdots\cdots ③$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ であるから

$$\vec{q}=\frac{t}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{p}-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{r} \quad \cdots\cdots ④$$

である．③と④により

$$s=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)},\qquad t=\boxed{\text{タチ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)$$

である．

(4)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ とする．$|\vec{p}|=1$ のとき，$\vec{p}$ と$\vec{q}$ の内積をa を用いて表そう．①により

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

である．また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=\boxed{\text{ツ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\boxed{\text{テ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

である．したがって

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{\boxed{\text{トナ}}-\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である．

(解説)

(1)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FA}=\vec{q}-\vec{p}=⓶$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2=|\vec{p}|^2-\boxed{2}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

(2)

$$\overrightarrow{FD}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\overrightarrow{FA}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\overrightarrow{FB}=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}$$

(3)

$$\vec{q}=4\overrightarrow{FD}-3\vec{p}=\boxed{-3}\,\vec{p}+\boxed{4}\,s\vec{r}$$

$$\overrightarrow{FE}=(1-a)\overrightarrow{FB}+a\overrightarrow{FC}$$

$$\vec{q}=\overrightarrow{FB}=\frac{1}{1-a}\overrightarrow{FE}-\frac{a}{1-a}\overrightarrow{FC}=\frac{t}{\boxed{1}-\boxed{a}}\vec{p}-\frac{\boxed{a}}{1-a}\vec{r}$$

点Fは三角形ABCの内部にあるから，ベクトル$\vec{p}$とベクトル$\vec{r}$は一次独立.

よって，

$$-3=\frac{t}{1-a},\qquad 4s=-\frac{a}{1-a}$$

$$\therefore\quad s=\frac{\boxed{-a}}{\boxed{4}(1-a)},\qquad t=\boxed{-3}(1-a)$$

(4) $|\vec{p}|=1$ のとき，

$$|\overrightarrow{AB}|^2=1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

また，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BE}|^2&=|\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FB}|^2\\&=|t\vec{p}-\vec{q}|^2\\&=|-3(1-a)\vec{p}-\vec{q}|^2\\&=\boxed{9}(1-a)^2+\boxed{6}(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2$ より

$$1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

$$(6a-8)\vec{p}\cdot\vec{q}=9(1-a)^2-1=9a^2-18a+8=(3a-4)(3a-2)$$

$$\therefore\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{\boxed{3a}-\boxed{2}}{\boxed{2}}$$

5.

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて29ページの正規分布表（省略）を

用いてもよい．

(1)　a を正の整数とする．2，4，6，…，$2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている．この箱から1枚のカードを無作為に取り出すとき，そこに書かれた数字を表す確率変数を X とする．このとき，$X=2a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

$a=5$ とする．X の平均（期待値）は $\boxed{ウ}$，X の分散は $\boxed{エ}$ である．また，s，t は定数で $s>0$ のとき，$sX+t$ の平均が20，分散が32となるように s，t を定めると，$s=\boxed{オ}$，$t=\boxed{カ}$ である．このとき，$sX+t$ が20以上である確率は0.$\boxed{キ}$ である．

(2)　(1)の箱のカードの枚数 a は3以上とする．この箱から3枚のカードを同時に取り出し，それらのカードを横1列に並べる．この試行において，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする．このとき，事象 A の起こる確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

この試行を180回繰り返すとき，事象 A が起こる回数を表す確率変数を Y とすると，Y の平均 m は $\boxed{コサ}$，Y の分散 σ^2 は $\boxed{シス}$ である．ここで，事象 A が18回以上36回以下起こる確率の近似値を次のように求めよう．

試行回数180は大きいことから，Y は近似的に平均 $m=\boxed{コサ}$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{\boxed{シス}}$ の正規分布に従うと考えられる．ここで，$Z=\dfrac{Y-m}{\sigma}$ とおくと，求める確率の近似値は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
P(18\leqq Y\leqq 30)&=P\left(-\boxed{セ}.\boxed{ソタ}\leqq Z\leqq \boxed{チ}.\boxed{ツテ}\right)\\
&=0.\boxed{トナ}
\end{aligned}
$$

(3)　ある都市での世論調査において，無作為に400人の有権者を選び，ある政策に対する賛否を調べたところ，320人が賛成であった．この都市の有権者全体のうち，この政策の賛成者の母比率 p に対する信頼度95％の信頼区間を求めたい．

この調査での賛成者の比率（以下，これを標本比率という）は0.$\boxed{ニ}$ である．

標本の大きさが400と大きいので，二項分布の正規分布による近似を用いると，p に対する信頼度95%の信頼区間は

$$0.\boxed{\text{ヌネ}} \leqq p \leqq 0.\boxed{\text{ノハ}}$$

である．

母比率 p に対する信頼区間 $A \leqq p \leqq B$ において，$B-A$ をこの信頼区間の幅とよぶ．以下，R を標本比率とし，p に対する信頼度95%の信頼区間を考える．

上で求めた信頼区間の幅を L_1

標本の大きさが400の場合に $R=0.6$ が得られたときの信頼区間の幅を L_2

標本の大きさが500の場合に $R=0.8$ が得られたときの信頼区間の幅を L_3

とする．このとき，L_1，L_2，L_3 について $\boxed{\text{ヒ}}$ が成り立つ．$\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ $L_1 < L_2 < L_3$　① $L_1 < L_3 < L_2$　② $L_2 < L_1 < L_3$

③ $L_2 < L_3 < L_1$　④ $L_3 < L_1 < L_2$　⑤ $L_3 < L_2 < L_1$

(解説)

(1)

$X=2a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{a}}$．

$a=5$ のとき，X の平均値 $\overline{X}$ は

$$\overline{X}=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{5}\times 2k=\frac{2+4+6+8+10}{5}=\boxed{6}$$

分散 $V(X)$ は

$$V(X)=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{5}\times(2k)^2-6^2=\frac{4}{5}\times\frac{5\times6\times11}{6}-36=\boxed{8}$$

$sX+t$ の平均が20，分散が32のとき，

$$s\overline{X}+t=6s+t=20$$

$$V(sX+t)=s^2V(X)=8s^2=32$$

$s>0$ より，$s=\boxed{2}$，$t=\boxed{8}$．

$sX+t=2X+8\geqq 20$ となるのは，$X\geqq 6$ のとき．すなわち $X=6, 8, 10$ のときで確率 $0.\boxed{6}$．

(2)　異なる数字の書いてある3枚のカードの順列の問題だから，確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$．

二項分布による平均値と分散を求めると，

$m=180\times\dfrac{1}{6}=\boxed{30}$，$\sigma^2=180\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=\boxed{25}$．

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ で変数変換すると，正規分布表より

$$
\begin{aligned}
P(18\leqq X\leqq 36)&=P\left(\frac{18-30}{5}\leqq Z<\frac{36-30}{5}\right)\\
&=P\left(-\boxed{2}.\boxed{40}\leqq Z\leqq\boxed{1}.\boxed{20}\right)\\
&=0.4918+0.3849\\
&=0.8767\\
&=0.\boxed{88}
\end{aligned}
$$

(3)

賛成者の標本比率は$\dfrac{320}{400}=0.\boxed{8}$．

分散は$\sigma^2=400\times0.8\times0.2=64$，標準偏差は8，標本に対する比率は$\dfrac{8}{400}=0.02$．

信頼度95%の信頼区間は，

$$0.8-2\times0.02\leqq p\leqq 0.8+2\times0.02$$

すなわち，

$$0.\boxed{76}\leqq p\leqq 0.\boxed{84}$$

これより，$L_1=0.84-0.76=0.08$

標本の大きさ400，$R=0.6$ のとき標準偏差$\sigma_2=\sqrt{400\times0.6\times0.4}=4\sqrt{6}$．

$$L_2=\frac{4\sqrt{6}}{400}\times4=\frac{4\sqrt{6}}{100}\fallingdotseq\frac{9.78}{100}\fallingdotseq0.0978$$

標本の大きさ500，$R=0.8$ のとき標準偏差$\sigma_3=\sqrt{500\times0.8\times0.2}=4\sqrt{5}$．

$$L_3=\frac{4\sqrt{5}}{500}\times4\fallingdotseq\frac{1}{100}\times3.2\times2.236\fallingdotseq0.0716$$

よって，$L_3<L_1<L_2$ で④．