1.

〔1〕 x を実数とし

$$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$

とおく．整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x)=x(5-x)+n^2+\boxed{\text{ア}}\,n$$

であり，したがって，$X=x(5-x)$ とおくと

$$A=X\left(X+\boxed{\text{イ}}\right)\left(X+\boxed{\text{ウエ}}\right)$$

と表せる．

$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\boxed{\text{オ}}$ であり，$A=2^{\boxed{\text{カ}}}$ である．

〔2〕

(1)　全体集合 U を $U=\{x \mid x\text{は}20\text{以下の自然数}\}$ とし，次の部分集合 A, B, C を考える．

$A=\{x \mid x\in U \text{ かつ } x\text{は}20\text{の約数}\}$

$B=\{x \mid x\in U \text{ かつ } x\text{は}3\text{の倍数}\}$

$C=\{x \mid x\in U \text{ かつ } x\text{は偶数}\}$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し，空集合を $\varnothing$ と表す．

次の $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ．

集合の関係

(a)　$A\subset C$

(b)　$A\cap B=\varnothing$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{キ}}$ である．

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ．

集合の関係

(c)　$(A\cup C)\cap B=\{6, 12, 18\})$
(d)　$(A\cup C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{ク}$ である.

	⓪	①	②	③
(c)	正	正	誤	誤
(d)	正	誤	正	誤

(2)　実数xに関する次の条件p, q, r, sを考える.

$p:|x-2|>2,\ q:x<0,\ r:x>4,\ s:\sqrt{x^2}>4$

次の $\boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちからそれぞれ一つ選べ.
ただし，同じものを繰り返し選んでもよい.

qまたはrであることは，pであるための $\boxed{ケ}$ ．また，sはrであるための $\boxed{コ}$.

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件ではあるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

〔3〕　aを正の実数とし

$$f(x)=ax^2-2(a+3)x-3a+21$$

とする．2次関数$y=f(x)$のグラフの頂点のx座標をpとおくと

$$p=\boxed{サ}+\frac{\boxed{シ}}{a}$$

である.

$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるような a の範囲は

$$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ス}}$$

である．

また，$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が $f(p)$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} \leqq a$$

である．

また，$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が1であるのは

$$a=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \quad \text{または} \quad a=\frac{\boxed{\text{チ}}+\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

のときである．

解説

〔1〕

$$(x+n)(n+5-x)=x(5-x)+(x+5-x)n+n^2=x(5-x)+n^2+\boxed{5}\,n$$

である．$X=x(5-x)=5x-x^2$ とおくと

$$(x+1)(6-x)=-x^2+5x+6=X+6$$

$$(x+2)(7-x)=-x^2+5x+14=X+14$$

より，

$$A=X\left(X+\boxed{6}\right)\left(X+\boxed{14}\right)$$

と表せる．

$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，

$$2x-5=\sqrt{17}$$

$$4x^2-20x+25=17$$

$$x^2-5x+2=0$$

$$\therefore \quad X=-x^2+5x=\boxed{2}$$

$$A=2\times(2+6)\times(2+14)=2^1\times2^3\times2^4=2^{\boxed{8}}$$

〔2〕

(1)

実際に A, B, C を書き下せば，

$A=\{1,2,4,5,10,20\}$

$B=\{3,6,9,12,15,18\}$

$C=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$

(a)　$1 \in A$ だが $1 \notin C$ なので，$A \subset C$ は誤り．

(b)　$A\cap B=\varnothing$ で正しい．

$\boxed{\text{キ}}$ は②．

(c)　$A\cup C=\{1,2,4,5,6,8,10,12,14,16,18,20\}$

$(A\cup C)\cap B=\{6,12,18\}$ で正しい．

(d)　$\overline{A}\cap C=\{6,8,12,14,16,18\}$

左辺$=(\overline{A}\cap C)\cup B=\{3,6,8,9,12,14,15,16,18\}$

$B\cup C=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$

右辺$=\overline{A}\cap(B\cup C)=\{3,6,8,9,12,14,15,16,18\}$

で，左辺＝右辺．

$\boxed{\text{ク}}$ は⓪．

注意　(d)でこの問題の場合は成立しているが，一般には
$(\overline{A}\cap C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$ が成立しないこともある（すなわち，恒等式ではない）．

(2)　p において，「$|x-2|>2$」は「$x<0$ または$4<x$」と言い換えらるので，q またはr であることは，p であるための必要十分条件（②）．s において，「$\sqrt{x^2}>4$」は「$|x|>4$」に等価．すなわち，条件s は「$x<-4$ または$4<x$」である．よって，s はr であるための「必要条件であるが，十分条件ではない」（⓪）である．

〔3〕

$$
\begin{aligned}
f(x)&=ax^2-2(a+3)x-3a+21\\
&=a\left(x-\frac{a+3}{a}\right)^2-\frac{(a+3)^2}{a}-3a+21\\
&=a\left\{x-\left(1+\frac{3}{a}\right)\right\}^2-4a+15-\frac{9}{a}
\end{aligned}
$$

よって，頂点のx 座標$p=\boxed{1}+\dfrac{\boxed{3}}{a}$

a は正の数だから，$p>1$ である．よって，頂点は定義域$0\leqq x\leqq 4$ 内に存在するか，定義域よりも右側である．

最小値が$f(4)$ となるのは，p が定義域の右端かそれより右側にある場合である．よって，

$$p=1+\frac{3}{a}\geqq 4$$

$$\therefore\quad 0<a\leqq \boxed{1}$$

また，最小値が$f(p)$ となるのは，頂点が定義域内にあるときだから，

$$0<1+\frac{3}{a}\leqq 4$$

∴　$1 \leqq a$

i)　$0 < a \leqq 1$ のとき

$f(4) = 5a - 3 = 1$

より，$a = \dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$

ii)　$1 \leqq a$ のとき

$f(p) = -4a + 15 - \dfrac{9}{a} = 1$

より，

$4a^2 - 14a + 9 = 0$

これを$1 \leqq a$ で解いて，

$$a = \frac{\boxed{7} + \sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{4}}$$

2．

〔1〕　四角形ABCDにおいて，3辺の長さをそれぞれAB＝5，BC＝9，CD＝3，対角線ACの長さをAC=6とする．このとき

$$\cos\angle ABC = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\ ,\quad \sin\angle ABC = \frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

ここで，四角形ABCDは台形であるとする．

次の $\boxed{カ}$ には下の⓪～②から，$\boxed{キ}$ には③・④から当てはまるものを一つずつ選べ．

CD $\boxed{カ}$ AB・$\sin\angle ABC$ であるから $\boxed{キ}$ である．

⓪　＜　　①　＝　　②　＞

③　辺ADと辺BCが平行　　④辺ABと辺CDが平行

したがって

$BD = \boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$

である．

〔2〕　ある陸上競技大会に出場した選手の身長（単位cm）と体重（単位はkg）のデータが得られた．男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループに分けると，それぞれのグループの選手数は，男子短距離が328人，男子長距離が271人，女子

短距離が319人，女子長距離が263人である．

(1)　次ページの図1および図2（省略）は，男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループにおける，身長のヒストグラムおよび箱ひげ図である．

次の $\boxed{\text{サ}}$・$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから，一つずつ選べ．ただし，解答の順序は問わない．

図1および図2から読み取れる内容として正しいものは，$\boxed{\text{サ}}$・$\boxed{\text{シ}}$ である．

⓪　四つのグループのうちで範囲が最も大きいのは，女子短距離グループである．

①　四つのグループのすべてにおいて，四分位範囲は12未満である．

②　男子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大階級に中央値が入っている．

③　女子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大の階級に第一四分位数が入っている．

④　すべての選手の中で最も身長の高い選手は，男子長距離グループの中にいる．

⑤　すべての選手の中で最も身長の低い選手は，女子長距離グループの中にいる．

⑥　男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第3四分位数はともに180以上182未満である．

(2)　身長をH，体重をWとし，Xを$X=\left(\dfrac{H}{100}\right)^2$で，$Z$を$Z=\dfrac{W}{X}$で定義する．次ページの図3（省略）は，男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループにおけるXとWのデータの散布図である．ただし，原点を通り，傾きが15，20，25 30である四つの直線l_1, l_2, l_3, l_4も補助的に描いている．また，次ページのの図4（省略）の(a)，(b)，(c)，(d)で示すZの四つの箱ひげ図は，男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループのいずれかの箱ひげ図に対応している．

次の $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ．ただし，解答の順序は問わない．

図3および図4から読み取れる内容として正しいものは，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ である．

まず，各箱ひげ図の四分位範囲を見てみると，(a)が最も数値が高く，次に(b)，(c)がいずれも中央値20付近で散布し，(d)の数値が最も低いことが分かる．さらに(b)の方が(c)よりもZの最小値が低く15付近のものがあるのに対し，(b)よりも(c)の方が最大値が高く，30付近のものがあることが分かる．これと散布図を比較して，(a)男子短距離，(b)女子短距離，(c)男子長距離，(d)女子長距離のものであることが分かる．

⓪　四つのグループのすべてにおいて，XとWには負の相関がある．

①　四つのグループのうちでZの中央値が一番大きいのは，男子長距離グループである．

②　四つのグループのうちでZの範囲が最小なのは，男子長距離グループである．

③　四つのグループのうちでZの四分位範囲が最小なのは，男子短距離グループである．

④　女子長距離グループのすべてのZの値は25より小さい．

⑤　男子長距離グループのZの箱ひげ図は(c)である．

以上より，④･⑤を選択．

(3)　nを自然数とする．実数値のデータ$x_1, x_2, \cdots, x_n$および$w_1, w_2, \cdots, w_n$に対して，それぞれの平均値を

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \quad \overline{w}=\frac{w_1+w_2+\cdots+w_n}{n}$$

とおく．等式$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\overline{w}=n\overline{x}\ \overline{w}$などに注意すると，偏差の積の和は

$$(x_1-\overline{x})(w_1-\overline{w})+(x_2-\overline{x})(w_2-\overline{w})+\cdots+(x_n-\overline{x})(w_n-\overline{w})$$
$$=x_1w_1+x_2w_2+\cdots x_nw_n-\boxed{\text{ソ}}$$

となることがわかる．$\boxed{\text{ソ}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　$\overline{x}\ \overline{w}$　　①　$(\overline{x}\ \overline{w})^2$　　②　$n\overline{x}\ \overline{w}$　　③　$n^2\overline{x}\ \overline{w}$

(解説)

〔1〕

余弦定理より

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\times AB\times BC}$$
$$= \frac{5^2+9^2-6^2}{2\times5\times9}$$
$$= \frac{\boxed{7}}{\boxed{9}}$$

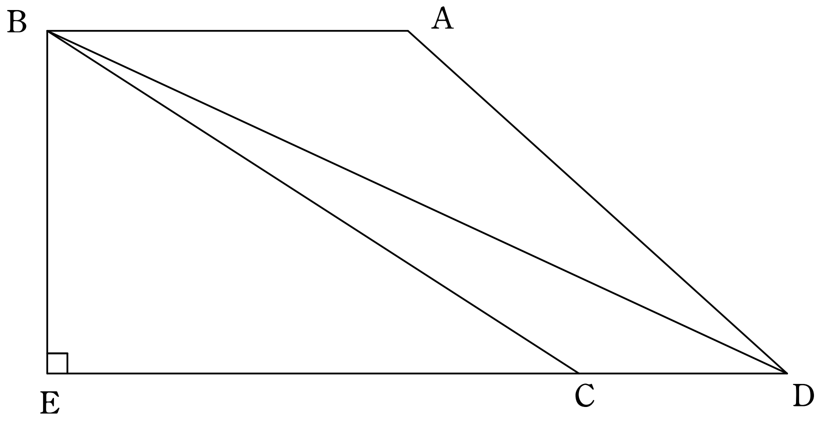
$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}$$
$$= \frac{\boxed{4}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{9}}$$

$$AB\cdot\sin\angle ABC = \frac{20\sqrt{2}}{9} > \frac{28}{9} > 3$$

よって，

$$CD \boxed{⓪ <} AB\cdot\sin\angle ABC$$

仮に$AD /\!/ BC$とすると，$AB\cdot\sin\angle ABC$ は台形の高さに相当するから，$CD \geqq AB\cdot\sin\angle ABC$ でなければならない．ところが$CD < AB\cdot\sin\angle ABC$なので，$AD \not\parallel BC$である．よって，$AB /\!/ CD$．$\boxed{キ}$ は④を選択．このとき，辺CDの頂点Cがわの延長上$BE\perp ED$となるように点Eをとると，各頂点の配置は下図のようになる．∠ABCが鋭角であることを考慮した．



$\angle ABC = \angle BCE$なので，

$$CE = BC\cdot\cos\angle BCE = 9\times\frac{7}{9} = 7$$

$$BE = BC\cdot\sin\angle BCE = 9\times\frac{4\sqrt{2}}{9} = 4\sqrt{2}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\mathrm{BE}^2+\mathrm{ED}^2\\&=(4\sqrt{2})^2+(7+3)^2\\&=32+100\\&=132\end{aligned}$$

$\therefore\quad \mathrm{BD}=\sqrt{132}=2\sqrt{33}$

〔2〕

(1)

⓪　四つのグループのうちで範囲が最も大きいのは，女子短距離グループである．
　→　男短50，男長43，女短42，女長35だから，間違い．

①　四つのグループのすべてにおいて，四分位範囲は12未満である．
　→　それぞれの四分位範囲は，男短10，男長9，女短9，女長9だから正しい．

②　男子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大階級に中央値が入っている．
　→　男長の中央値は176，度数最大階級は170～175だから間違い．

③　女子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大の階級に第一四分位数が入っている．　→　女長の第一四分位数は161．女長の度数最大は165～170だから間違い．

④　すべての選手の中で最も身長の高い選手は，男子長距離グループの中にいる．
　→　最高身長は男子短距離選手の中にいるから間違い．

⑤　すべての選手の中で最も身長の低い選手は，女子長距離グループの中にいる．
　→　最低身長は女子短距離選手の中にいるから間違い．

⑥　男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第3四分位数はともに180以上182未満である．
　→　男短の中央値は181，男長の第3四分位数は181で正しい．

いじょうより，①・⑥を選択．

(2)

まず，各箱ひげ図の四分位範囲を見てみると，(a)が最も数値が大きく，次に(b)，(c)がいずれも中央値20付近で散布し，　(d)の数値が最も低いことが分かる．さらに(b)の方が(c)よりもZの最小値が低く15付近のものがあるのに対し，(b)よりも(c)の方が最大値が高く，30付近のものがあることが分かる．これと散布図を比較して，(a)男子短距離，(b)女子短距離，(c)男子長距離，(d)女子長距離のものであることが分かる．

⓪　四つのグループのすべてにおいて，XとWには負の相関がある．
　→　概ね右肩上がりなので，正の相関がみられるから間違い．

①　四つのグループのうちでZの中央値が一番大きいのは，男子長距離グループである．
　→　中央値が大きいのは(a)で男子短距離だから間違い．

②　四つのグループのうちでZの範囲が最小なのは，男子長距離グループである．
　→　Zの範囲が最小なのは(d)で，女子長距離だから間違い．

③　四つのグループのうちでZの四分位範囲が最小なのは，男子短距離グループである．

　→　(a)の男子短距離は四分位範囲が最も大きいので間違い．

④　女子長距離グループのすべてのZの値は25より小さい．

　→　(d)の箱ひげ図より，最大値は25を切っているから正しい．

⑤　男子長距離グループのZの箱ひげ図は(c)である．

　→　正しい．

以上より，④・⑤を選択．

(3)

$$(x_1-\overline{x})(w_1-\overline{w})+(x_2-\overline{x})(w_2-\overline{w})+\cdots+(x_n-\overline{x})(w_n-\overline{w})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(w_k-\overline{w})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_kw_k-\overline{x}\sum_{k=1}^{n}w_k-\overline{w}\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}\overline{x}\ \overline{w}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_kw_k-\overline{x}(n\overline{w})-\overline{w}(n\overline{x})+n\overline{x}\ \overline{w}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_kw_k-\boxed{n\overline{x}\ \overline{w}}$$

よって，選択肢は②．

3．

一般に，事象Aの確率を$P(A)$で表す．また，事象Aの余事象を$\overline{A}$と表し，二つの事象A, Bの積事象を$A\cap B$と表す．

大小2個のさいころを同時に投げる試行において

Aを「大きいさいころについて，4の目が出る」という事象

Bを「2個のさいころの出た目の和が7である」という事象

Cを「2個のさいころの出た目の和が9である」という事象

とする．

(1)　事象A，B，Cの確率は，それぞれ

$$P(A)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad P(B)=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad P(C)=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

(2)　事象Cが起こったときの事象Aが起こる条件付き確率は$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$であり，事象$A$

が起こったときの事象Cが起こる条件付き確率は$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$である.

(3)　次の$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$に当てはまるものを，下の⓪～②のうちからそれぞれ一つ選べ. ただし，同じ，おなじものを繰り返し選んでもよい.

$P(A\cap B)\boxed{\text{サ}}P(A)P(B)$

$P(A\cap C)\boxed{\text{シ}}P(A)P(C)$

⓪　<　　①　=　　②　>

(4)　大小2個のさいころを同時に投げる試行を2回繰り返す. 1回目に事象$A\cap B$が起こり，2回目に事象$\overline{A}\cap C$が起こる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$である. 三つの事象$A, B, C$がいずれもちょうど1回ずつ起こる確率は$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$である.

解説

(1)

根元事象を(大の目，小の目)で表す.

事象A, B, Cを集合で表せば

$A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$

$B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$C=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

全事象は$6\times6=36$通りだから，

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}\ ,\ P(B)=\frac{6}{36}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}\ ,\ P(C)=\frac{4}{36}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}}$$

(2)

$A\cap C=\{(4,5)\}$だから，

Cが起こったときのAが起こる条件付き確率$P_C(A)$は

$$P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{1}{36}\div\frac{1}{9}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

Aが起こったときのCが起こる条件付き確率$P_A(C)$は

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{1}{36}\div\frac{1}{6}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$$

(3)

$A\cap B=\{(4,3)\}$ だから，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}$．$P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$．

よって，

$$P(A\cap B)\boxed{=}P(A)P(B)$$

$P(A\cap C)=\dfrac{1}{36}$ で，$P(A)P(C)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{54}$ だから，

$$P(A\cap C)\boxed{>}P(A)P(C)$$

参考　この設問では問うてはいないが，事象の独立の定義「$P(X\cap Y)=P(X)P(Y)$」より，事象A と事象B は独立であるが，事象A と事象C は独立でないといえる．

(4)　$\overline{A}\cap C=\{(3,6),(5,4),(6,3)\}$ より，$P(\overline{A}\cap C)=\dfrac{1}{12}$．また各試行は独立だから，1回目に$A\cap B$，2回目に$\overline{A}\cap C$ である確率は，

$$P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap C)=\frac{1}{36}\times\frac{1}{12}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{432}}$$

実は，ここまでの部分が前振りとなっているのだが，次の文章が分かりづらくなっている．試行は2回であるのに対し，「3つの事象がちょうど1回ずつ」とある．これは，前振りの部分と合わせると，次のように解釈できる．事象B と事象C は同時に起こることはないので，これらは別々の試行に割り振る必要がある．残りの事象A は，事象B または事象C と同時に起こる必要がある．よって，確率

$$P(A\cap C)\times P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{36}\times\frac{5}{36}=\frac{5}{1296}$$

と，$\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソタ}}$ を合わせて，これらを2回の試行のいずれに割り振るかを考慮すると，

求める確率は

$$2\times\left(\frac{1}{432}+\frac{5}{1296}\right)=2\times\frac{8}{1296}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{81}}$$

4．

(1)　144を素因数分解すると

$144 = 2^{\boxed{ア}} \times \boxed{イ}^{\boxed{ウ}}$

であり，144の正の約数の個数は$\boxed{エオ}$個である．

(2) 不定方程式

$144x - 7y = 1$

で整数解x, yの中で，xの絶対値が最小になるのは

$x = \boxed{カ}$，　$y = \boxed{キク}$

であり，すべての整数解は，kを整数として

$x = \boxed{ケ}k + \boxed{カ}$，　$y = \boxed{コサシ}k + \boxed{キク}$

と表される．

(3) 144の倍数で，7で割ったら余りが1となる自然数のうち，正の約数の個数が18個である最小のものは$144 \times \boxed{ス}$であり，正の約数の個数が30個である最小のものは$144 \times \boxed{セソ}$である．

解説

(1)

$144=2^{\boxed{4}}\times\boxed{3}^{\boxed{2}}$

正の約数の個数は $\boxed{15}$ 個.

(2) 不定方程式 $144x-7y=1$ をユークリッドの互除法を用いて解く.

$144=7\times20+4$

$7=4\times1+3$

$4=3\times1+1$

逆にたどって,

$4-3\times1=4-(7-4\times1)\times1=1$

$\therefore\quad 4\times2-7\times1=1$

$(144-7\times20)\times2-7\times1=1$

$\therefore\quad 144\times2-7\times41=1$

これと $144x-7y=1$ から一般解を求めると,

$144(x-2)=7(y-41)$

144と41は互いに素だから，整数 k を用いて,

$x-2=7k$, $y-41=144k$

よって一般解は

$x=7k+2$, $y=144k+41$ (k は整数)

このうち，x の絶対値が最小のものは，$k=0$ のとき,

$x=2$, $y=41$

(3) (2)より $144x=7y+1$ の x の一般解は整数 k を用いて，$x=7k+2$ と表せる.

ところで(1)より $144=2^4\times3^2$ だから，正の約数が18個であるとき，$x=7k+2$ が因数3をもっているとすると，$(4+1)\times(3+1)=20$ 個以上の約数をもってしまうので不適．また，$7k+2$ が2，3以外の素因数を持ったとすると，$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$ 個以上の約数をもってしまうので不適．したがって，ちょうど18個になるのは $k=0$ のとき，$x=\boxed{2}$ で，$144\times2=2^5\times3^2$ となるときである.

また，正の約数が30個となるのは $30=5\times3\times2$ なので，$7k+2$ が2，3以外の素数となるときである．自然数とあるので，最小のものは $k=3$ のとき $x=\boxed{23}$ である.

5.

△ABCにおいてAB=2，AC=1，∠A=90°とする.

∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすると，BD＝$\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

点Aを通り点Dで辺BCに接する円と辺ABとの交点でAと異なるものをEとすると，

AB・BE＝$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であるから，BE＝$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

次の $\boxed{\text{コ}}$ には下の⓪～②から，$\boxed{\text{サ}}$ には③・④から当てはまるものを一つずつ選べ．

$\dfrac{\text{BE}}{\text{BD}}\boxed{\text{コ}}\dfrac{\text{AB}}{\text{BC}}$ であるから，直線ACと直線DEの交点は辺ACの端点 $\boxed{\text{サ}}$ の側の延長上にある．

⓪　＜　　①　＝　　②　＞　　③　A　　④　C

その交点をFとすると，$\dfrac{\text{CF}}{\text{AF}}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であるから，CF＝$\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．したがって，BFの長さが求まり，$\dfrac{\text{CF}}{\text{AC}}=\dfrac{\text{BF}}{\text{AB}}$ であることがわかる．

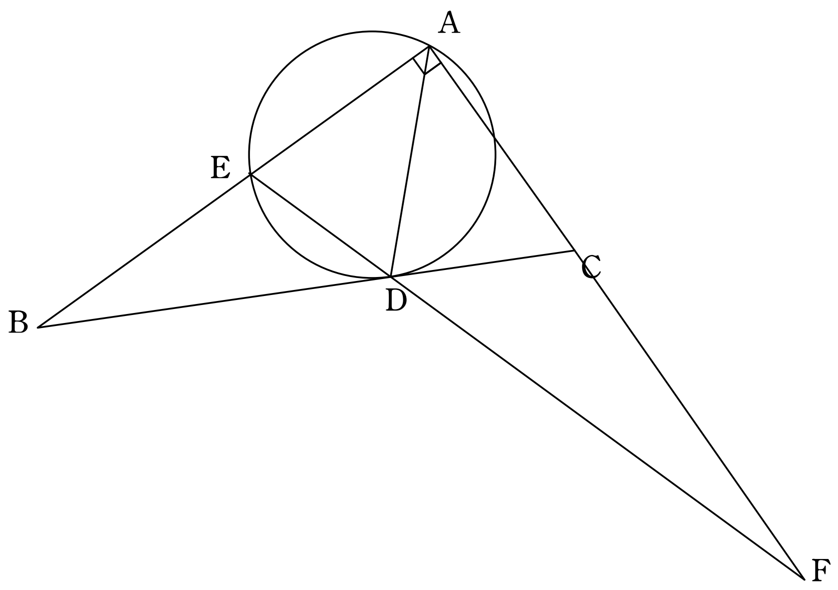
次の $\boxed{\text{タ}}$ には下の⓪～③当てはまるものを一つ選べ．

点Dは△ABFの $\boxed{\text{タ}}$ ．

⓪　外心である　　①　内心である　　②　重心である

③　外心，内心，重心のいずれでもない

(解説)



$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ であることと，線分ADが∠Aの二等分線であることから，

$BD=\dfrac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{3}}$.

方べきの定理より，$AB\cdot BE=BD^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2=\dfrac{\boxed{20}}{\boxed{9}}$.

$BE=\dfrac{20}{9}\div AB=\dfrac{\boxed{10}}{\boxed{9}}$.

$\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{10}{9}\times\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

だから，$\dfrac{BE}{BD}\boxed{⓪<}\dfrac{AB}{BC}$ である．これは，すなわち$\dfrac{BE}{AB}<\dfrac{BD}{BC}$ ということだから，ABに対するBEの比率よりも，BCに対するBDの比率が大きいことを意味する．したがって，直線ACと直線DEは点④Cの延長上で交わる．メネラウスの定理より，

$$\frac{CF}{AF}\times\frac{BD}{CD}\times\frac{AE}{BE}=1$$

$$\therefore \quad \frac{CF}{AF}=\frac{CD}{BD}\times\frac{BE}{AE}=\frac{1}{2}\times\frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{\left(2-\frac{10}{9}\right)}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}$$

AC:CF＝3:5 だから,

$$CF=AC\times\frac{5}{3}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$$

また,

$$BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}$$

よって，$AB:BF=2:\frac{10}{3}=3:5$

すなわち，$\frac{CF}{AC}=\frac{BF}{AB}$

これは，直線BCが∠Bの二等分線であることを意味する.

よって，点Dは三角形ABFの角の二等分線の交点だから,

⓪内心である.