

◆ 2025=3×3×3×3×5×5なので…



今年度の入試問題から：

2025 年度 一橋大学 入試数学 第 1 問

正の整数 n に対し、 n の正の約数の個数を $d(n)$ とする。たとえば、6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 の 4 個なので、 $d(n) = 4$ である。また、

$$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt{n}}$$

とする。

- (1) $f(2025)$ を求めよ。
- (2) 素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ。
- (3) $f(n)$ の最大値と、そのときの n を求めよ。

毎年恒例のその年の年号（西暦）を用いた問題です。ここ JUKEN でも 6 年連続で扱っています。今年の数値は「2025」です。

- (1) これは簡単ですね。

$$2025 = 5 \times 405 = 5 \times 5 \times 81 = 5 \times 5 \times 3 \times 27 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 9 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$2025 = 3^4 \times 5^2$ なので正の約数の個数は $d(n) = (4+1)(2+1) = 15$ 個です。また $\sqrt{2025} = 5 \times 3^2 = 45$ なので、

$$f(2025) = \frac{d(2025)}{\sqrt{2025}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

- (2) 素数 p に対し、 p^k の正の約数は 1, p , $p^2 \cdots$, p^k の $(k+1)$ 個ですので、 $d(p^k) = (k+1)$ 。
また $\sqrt{p^k} = p^{\frac{k}{2}}$ なので

$$f(p^k) = \frac{k+1}{p^{\frac{k}{2}}}$$

です。同様に p^{k+1} に対して考えれば、

$$f(p^{k+1}) = \frac{k+2}{p^{\frac{k+1}{2}}}$$

です。題意の条件は $f(p^k) \leq f(p^{k+1})$ なので、具体的に書けば

$$\frac{k+1}{p^{\frac{k}{2}}} \leq \frac{k+2}{p^{\frac{k+1}{2}}}$$

となります。これをどんどん同値変形して簡単にしていきましょう。

$$\begin{aligned}
\frac{k+1}{p^{\frac{k}{2}}} &\leq \frac{k+2}{p^{\frac{k+1}{2}}} \Leftrightarrow (k+1)p^{\frac{k+1}{2}} \leq (k+2)p^{\frac{k}{2}} \\
&\Leftrightarrow (k+1)p^{\frac{1}{2}} \leq (k+2) \\
&\Leftrightarrow p^{\frac{1}{2}} \leq \frac{k+2}{k+1} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{p} \leq \frac{k+2}{k+1} \\
&\Leftrightarrow p \leq \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2
\end{aligned}$$

素数 p は、 $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2$ 以下の数です。ここで $\frac{k+2}{k+1}$ を見て、「大して大きな数にならないこと」・「殆ど 1 に近い数」に気がきます。童心にかえって、帯分数にすれば、 $\frac{k+2}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1}$ ですから k が大きくなるに従って、 $\frac{k+2}{k+1}$ 自体はどんどん小さくなります。具体的に $k = 1, 2, 3, \dots$ を代入していくと、 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ みたいにどんどん小さくなって 1 に近づいていきます。 $p \leq \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2$ を満たす素数 p は、 $k = 1$ のときの $p = 2$ のみで、 $k \geq 2$ では、一番大きい $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ でさえ $\frac{16}{9}$ なので、これ以下の素数は見つけれられません。

(3) 今回は一般の自然数 n ですから、素数の冪とは限りません。どんな自然数も（正確には 1 以外の自然数は）素因数分解可能ですから、 $n \geq 2$ が

$$n = 2^i \times 3^j \times 5^k \times 7^\ell \times \dots$$

のように素因数分解できていたとしましょう。このとき正の約数の個数は $d(n) = (i+1)(j+1)(k+1)(\ell+1)\dots$ 個で、 $\sqrt{n} = 2^{\frac{i}{2}} \times 3^{\frac{j}{2}} \times 5^{\frac{k}{2}} \times 7^{\frac{\ell}{2}} \times \dots$ なので、

$$f(n) = \frac{(i+1)(j+1)(k+1)(\ell+1)\dots}{2^{\frac{i}{2}} \times 3^{\frac{j}{2}} \times 5^{\frac{k}{2}} \times 7^{\frac{\ell}{2}} \times \dots} = \frac{i+1}{2^{\frac{i}{2}}} \times \frac{j+1}{3^{\frac{j}{2}}} \times \frac{k+1}{5^{\frac{k}{2}}} \times \frac{\ell+1}{7^{\frac{\ell}{2}}} \times \dots$$

つまり

$$f(n) = f(2^i) \times f(3^j) \times f(5^k) \times f(7^\ell)$$

となっていて、3 以上の素数 p では、(2) より、 $f(p^k) > f(p^{k+1})$ となることが分かっています。従って、自然数 k については $f(p^1)$ が最大なのですが、その値は $f(p^1) = \frac{2}{\sqrt{p}}$ です。仮に $k = 0$ の場合、 $f(p^0) = f(1) = 1$ なので、 $p \geq 5$ の素数に対しては、素因数分解したときに p が現れない方が $f(p^k)$ の値も大きいです。 $f(n)$ を最大値にする n を探しているのですから、素因数分解して $n = 2^i \times 3^j$ の形になるものに限って探せばよいことになりました。 $f(n) = f(2^i) \times f(3^j)$ で $f(2^i)$ の方に関しては、(2) より、 i が自然数のとき $f(2^2) = \frac{3}{\sqrt{2^2}} = \frac{3}{2}$ が最大で、これは $f(2^1) = \sqrt{2}$ や $f(2^0) = 1$ より大きいです。 $f(3^j)$ の方も同様に j が自然数のとき $f(3^1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ が最大で、これも $f(3^0) = 1$ より大きいです。したがって $n = 2^2 \times 3^1 = 12$ のときの $f(12) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ が最大値になります。これはそもそも素因数分解できない $n = 1$ のときの $f(1) = 1$ より確かに大きいです。