2015 年度東大入試 (理系) 第 6 問

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p \leqq n \int_{-1}^{1} g(nx) f(x) dx \leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-1}^{1} h(nx) \log(1+e^{x+1}) dx$$

前回に引き続いて今回は (2) を解いてみよう。まず関数 $h(x) = -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ の係数が不自然なことに気が付くことが第一歩である。なぜ負号がつくのか。そして何故 $\dfrac{\pi}{2}$ なのか。前半 (1) の $g(x)$ の導関数になっていることに気付けば勝負あり。まず関数の台を削る。

$$n^2 \int_{-1}^{1} h(nx) \log(1+e^{x+1}) dx = n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx) \log(1+e^{x+1}) dx$$

$g(nx)$ を x で微分すると $nh(nx)$ になるので

$$n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx) \log(1+e^{x+1}) dx = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \{g(nx)\}' \log(1+e^{x+1}) dx$$

部分積分を実行する。

$$n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{g(nx)\}'\log(1+e^{x+1})dx = n\left[g(nx)\log(1+e^{x+1})\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

$x=\pm\dfrac{1}{n}$ で $g(nx)=0$ であることから

$$n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{g(nx)\}'\log(1+e^{x+1})dx = -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

ここで (1) を使おう。(1) の $f(x)$ として $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$ を適用する。p,q は単調増加関数 $f(x)$ の $|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ における最小値・最大値を選べばよい。

$$-q \leqq -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx \leqq -p$$

すなわち

$$-\frac{e^{1-\frac{1}{n}}}{1+e^{1-\frac{1}{n}}} \leqq -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx \leqq -\frac{e^{1+\frac{1}{n}}}{1+e^{1+\frac{1}{n}}}$$

$n\to\infty$ の極限をとって

$$-\frac{e}{1+e} \leqq (\text{与式}) \leqq -\frac{e}{1+e}$$

はさみうちの原理より

$$(\text{与式}) = -\frac{e}{1+e}$$

以上が通常の試験で解答すべき記述である。

さて超関数の理論を使って、解答を予想してみよう。前回説明したように $\lim_{n\to\infty} ng(nx) = \delta(x)$ であった。Dirac の δ 関数は次の特徴を持つのであった：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0)$$

(2) で登場する関数 $h(x)$ は $g(x)$ の導関数なので

$$\{g(x)\}' = h(x)$$

さらに合成関数の微分を考慮すれば

$$\{g(nx)\}' = nh(nx)$$

両辺 n 倍して

$$\{ng(nx)\}' = n^2 h(nx)$$

である。微分と極限の順序入れ替えとか細かい話を省略すれば

$$\delta'(x) = \{\lim_{n\to\infty} ng(nx)\}' = \lim_{n\to\infty}\{ng(nx)\}' = \lim_{n\to\infty} n^2 h(nx) \cdots (*)$$

とである。この式が核である。

さて問題の $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ の積分区間 $[-1,1]$ には特に意味はなかった。$[-2,2]$ でもよいし、$[-100,200]$ でもよい。面倒なので $(-\infty,\infty)$ にしておこう：

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx = \lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$$

さて積分と極限の順序入れ替えとか細かい話を省略すれば

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} n^2 h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$$

上記 $(*)$ の式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} n^2 h(nx)\log(1+e^{x+1})dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\log(1+e^{x+1})dx$$

部分積分を実行する

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\log(1+e^{x+1})dx = \left[\delta(x)\log(1+e^{x+1})\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

第 1 項目に関して、$x \to \pm\infty$ では、余裕で $\delta(x)$ は 0 である。また第 2 項目に関しては、δ 関数は特徴を表す式を用いよう。すなわち関数 $\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$ の $x=0$ での値になるのである：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\log(1+e^{x+1})dx = 0 - \frac{e^{0+1}}{1+e^{0+1}} = -\frac{e}{1+e}$$

Dirac の δ 関数は次の特徴：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0)$$

を持っていたが、その導関数 $\delta'(x)$ は次の特徴：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)F(x)dx = -F'(0)$$

を持つのである。一般に n 階微分可能な関数に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)F(x)dx = (-1)^n F^{(n)}(0)$$

が成り立つ。

以上のように、本問の (2) の解答の値は $F(x) = \log(1+e^{x+1})$ に対する $-F'(0)$ の値になると事前に予想できる。もちろん実際の入試では、先に示した高校数学の手法て解かなければならない。